强磁场下的格点QCD研究进展

丁亨通 李胜泰 刘俊宏
（华中师范大学"夸克与轻子"教育部重点实验室及粒子物理研究所 武汉 430079）

摘要 本文综述了近期利用格点量子色动力学对强磁场下量子色动力学(Quantum Chromodynamics,QCD)性质的研究进展。首先介绍了在格点上如何引入磁场，重点阐述零温下QCD的手征性质、QCD相转变温度及反磁催化，以及强磁场下QCD相结构，最后给出总结。

关键词 强磁场，格点量子色动力学，相结构，手征性质

中图分类号 O571.6，O572.24$^+$3

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040008

Progress on QCD properties in strong magnetic fields from lattice QCD

DING Hengtong LI Shengtai LIU Junhong
(*Key Laboratory of Quark and Lepton Physics* (*MOE*) *and Institute of Particle Physics*, *Central China Normal University*, *Wuhan 430079*, *China*)

Abstract We review the current status of quantum chromodynamics (QCD) properties in strong magnetic fields from lattice QCD. After a general introduction, we briefly present the implementation of a background magnetic field onto a lattice and discuss the recent progress on QCD properties at zero temperature, QCD transition temperature and inverse magnetic catalysis, and QCD phase structure in strong magnetic fields. Finally, we summarize this study.

Key words Strong magnetic fields, Lattice QCD, QCD phase structure, Chiral properties

近年来，强磁场下热物质的性质成为高能重离子碰撞领域的一个新的研究热点。相对论重离子非对心碰撞中可产生强度为10^{18}~10^{20}高斯的磁场[1-4]，其量级达到了π介子质量平方或量子色动力学(Quantum Chromodynamics，QCD)特征能标的平方，类似量级的磁场可能存在于宇宙早期[5]和磁星中[6]。因此，磁场与夸克之间的电磁相互作用变得不可忽略不计。磁场诱导的一个重要的、著名的效应是手征磁效应[1,7]。这是由于存在QCD手征反常，某一手性(chirality)的费米子的数目会多于另一类手性的费米子的数目，比如左手多于右手，在强磁场的极化下，这些费米子的总动量会沿着磁场的方向，即发生了电荷的分离从而形成电流。高能重离子碰撞实验中人们测量到了与电荷分离效应相吻合的信号，但是尚未确定该信号完全来源于手征磁效应或是其他的背景[8-11]。其中一部分重要的原因可能是由于对强磁场下的QCD手征反常的热力学性质[12-13]，以及磁场在重离子碰撞中的存活时间等动态性质并不清楚[14]。

不同于非零重子化学势，在从第一性原理出发的格点QCD模拟中加入外磁场并不会引入符号问题，因此，格点QCD可以直接模拟强相互作用物质处于外磁场下的各种性质。外磁场的大小由所模拟的格点间距及体系的空间体积所决定。目前，格点QCD在零温及有限温度下QCD中强子的性质及相结构方面已经取得了许多重要的进展。最近有关强磁场下的格点QCD研究的综述请参考文献[15-17]。

国家自然科学基金(No.12293064, No.12293060)资助
第一作者：丁亨通，男，1983年出生，2010年于德国Bielefeld大学获博士学位，研究领域为格点量子色动力学，E-mail：hengtong.ding@ccnu.edu.cn
收稿日期：2022-12-30，修回日期：2023-02-20
Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12293064, No.12293060)
First author: DING Hengtong, male, born in 1983, graduated from Bielefeld University, Germany with a doctoral degree in 2010, focusing on lattice QCD in extreme conditions, E-mail: hengtong.ding@ccnu.edu.cn
Received date: 2022-12-30, revised date: 2023-02-20

1 在格点量子色动力学中引入磁场

一般考虑指向为z方向的、不随时间改变的静态外磁场$\vec{B}=(0,0,B)$。外部磁场由$U(1)$场的固定因子$u_\mu(n)$来描述，它在朗道规范下的表达形式为[18–19]：

$$u_x(n_x,n_y,n_z,n_\tau)=\begin{cases}\exp\left[-iqa^2BN_xn_y\right],n_x=N_x-1\\ 1,\text{other}\end{cases}$$
$$u_y(n_x,n_y,n_z,n_\tau)=\exp\left[iqa^2Bn_x\right]$$
$$u_z(n_x,n_y,n_z,n_\tau)=u_t(n_x,n_y,n_z,n_\tau)=1 \quad (1)$$

其中：$n_\mu=0,1,2,...,N_\mu-1$表示的是在$\mu=x,y,z,\tau$方向上的坐标，N_μ表示的是格点在μ方向上的总点数。考虑到周期性边界条件，磁场在格点上被量子化为如下形式：

$$qB=\frac{2\pi N_b}{N_xN_y}a^{-2} \quad (2)$$

式中：q是夸克的电荷，$N_b\in Z$是在X-Y平面上通过单位面积的磁通量的数量（$N_xN_ya^2$即为X-Y平面的面积）。当前的格点量子色动力学研究一般是考察2＋1味的QCD，即考虑上、下和奇异三种味道的夸克，同时认为上、下夸克的质量是简并的。由于上夸克的电荷为+2/3e，下夸克和奇异夸克的电荷为−1/3e，但量子化条件必须对系统中所有的夸克均满足，因此格点QCD模拟中选择了所有夸克电荷的最大公约数q=1/3e。由此磁场强度具有如下表达式：

$$eB=\frac{6\pi N_b}{N_xN_y}a^{-2} \quad (3)$$

在实际模拟中，U(1)链接的周期性边界条件适用于除X方向以外的所有方向。由于受到边界条件的限制，N_b被限制在$0\leqslant N_b<N_xN_y/4$的范围内。则在格点QCD模拟中能达到的最小和最大的磁场强度分别为：

$$eB_{\min}=\frac{6\pi}{L^2},eB_{\max}=\frac{3\pi}{2}a^{-2} \quad (4)$$

式中：L为格点空间方向上的长度。因此，要想得到更小的磁场强度则需要增加格点模拟空间方向的物理长度，要想得到更大的磁场强度则需要减小格点间距a。

目前，在强磁场下格点QCD的研究中一般讨论的是2+1味的QCD或淬火近似下的QCD。包含海夸克的格点QCD模拟中采用的有天真的交错费米子（staggered）方案[18,20]，以及两种改进的交错费米子（staggered）离散方案：一个是高度改进的交错费米子（Highly Improved Staggered Quarks，HISQ）方案[21]；另一个是stout费米子方案[19,22]。对于淬火近似下的QCD，主要是用在研究强子谱学方面，其中价夸克的离散方式采用的有Overlap费米子[23]和Wilson费米子的离散方案[24]。

2 研究进展

2.1 零温下QCD的手征性质

格点中强子谱可以通过强子的两点关联函数来抽取。当时间长度趋于无穷时，两点关联函数$G_H(\tau)$与强子基态质量M_H有如下关系：

$$\lim_{\tau\to\infty}G_H(\tau)\sim e^{-M_H\tau} \quad (5)$$

$G_H(\tau)$可以由对应不同通道的算符号来构造$G_H(\tau)=\sum_x\langle O(0,x)O^\dagger(\tau,x)\rangle$，例如对于赝标量道算符$P^a$和矢量道算符$V^a_\mu$的表达式为：

$$P^a=\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi(x),V^a_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi(x) \quad (6)$$

在磁场中由于矢量道粒子的自旋，对于带电ρ介子来说有两个极化方向，其对应的算符为[24–25]：

$$V^a_\mp=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V^a_x\pm iV^a_y\right) \quad (7)$$

在研究磁场中的强子谱时，一般采用的是利用Wilson或Overlap离散方式和交错费米子（Staggered）离散方式构造的强子两点关联函数。交错费米子的离散方式在研究强子谱方面天生带有劣势：交错费米子的离散方式破坏了风对称性（Taste symmetry）。这导致交错费米子离散框架下的强子两点关联函数中一般含有带有振荡的、非物理的parity partner的贡献。幸运的是赝标量介子并不存在这样的非物理的振荡态，但是对于矢量和其他道介子质量谱的研究，交错费米子的离散方式就显得捉襟见肘。而Wilson或Overlap离散方式产生的格点QCD组态非常耗时，这导致了对于矢量介子的研究，目前仅存在于淬火近似下。

图1(a)中给出的是带电的赝标量介子，pion和kaon的质量随磁场强度的变化关系。这是基于采用高度改进的交错费米子在2+1味的格点QCD下得到的结果[21]。当磁场强度小于约0.3 GeV^{2}时，pion和kaon的质量均能被最低朗道能级（Lowest Landau Level，LLL）近似所描述。当磁场强度大于0.3 GeV^{2}时，pion和kaon的质量与LLL近似有所偏离。当磁场强度大于约0.7 GeV^2，它们的质量随着磁场的增大而减小。偏离LLL近似的行为在淬火近似下的格点QCD模拟中并没有被看到，这似乎预示着在强磁场下带电的pion和kaon不能再被认为是点粒子。

中性的赝标量介子在磁场中也呈现出了有意思

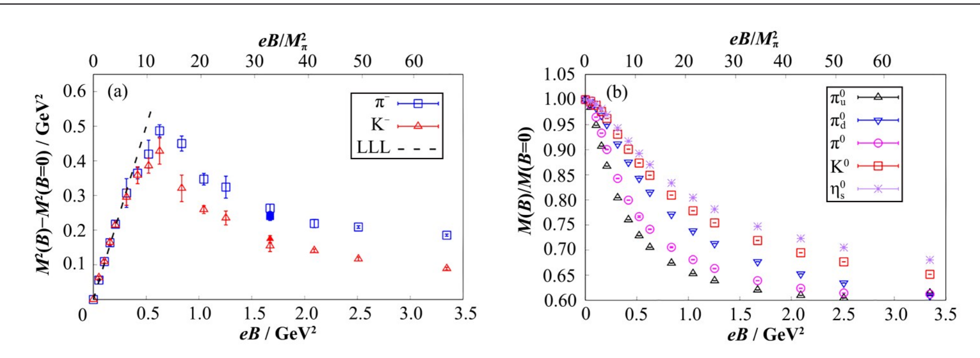


图1 带电赝标量介子质量的平方差(a)、中性赝标量介子质量在非零磁场与在零磁场下的质量的比值(b)随磁场强度的关系[21] 格点模拟采用的是高度改进的交错费米子，格点大小为$32^3×96$和$40^3×96$，pion质量为220 MeV

Fig.1 Mass squared difference between the case at nonzero magnetic fields and eB=0 (a), ratio of pseudoscalar meson mass to their values at vanishing magnetic fields (b) as a function of eB[21]. The results are obtained based on lattice simulations of (2+1)-flavor QCD on $32^3×96$ and $40^3×96$ lattices using the highly improved staggered fermions with pion mass of 220 MeV.

的行为。没有内部结构的、中性的点粒子是不会与磁场发生电磁相互作用的。由图1(b)，不带电的π^0和K^0的质量均随着磁场强度的增加而减小。两点重要的性质需要被提到：一是π^0和K^0不再是点粒子，要不然它们的质量应该与磁场强度无关；二是中性赝标量介子的质量总是会比带电的同类要小，这反映出了强磁场下同位旋对称性的破缺，同时中性赝标量介子而不是它们带电的同类应该是Goldstone玻色子。图1的结果也吸引了不少的唯象理论解释[26-30]。

图2中给出的是在淬火近似下采用Wilson离散方式得到的矢量介子ρ的质量随磁场强度的变化关系[24]。考虑到ρ的自旋为1，因此带电的ρ具有不同的极化方向。红色的点表示带正电的、自旋为−1的ρ介子，蓝色的点表示带正电的、自旋为+1的ρ介子的结果，品红色的点表示中性的ρ介子的结果。可以看到，不同极化方向的带电ρ介子给出了完全不一样的随磁场强度的依赖关系：自旋平行于磁场方向的带正电的ρ介子质量随磁场的增加而减小，自旋反平行随磁场强度的增加而变大。对于中性的ρ介子，其质量随着磁场强度而增加，这与中性的赝标量介子有明显的不同。

通过两点关联函数，人们可以抽取出强子的衰变常数[21]。图3(a)中给出了中性pion、kaon的衰变常数随磁场强度的变化关系。可以看到，它们均随磁场强度而增加。在小磁场强度的时候，中性pion的衰变常数比中性kaon的要小，但当磁场强度大于约0.35 GeV²时，前者超过了后者。图3(b)中显示，从中性pion关联函数的上夸克部分和下夸克部分抽取的衰变常数的平方与磁场强度的依赖。从图3可以看到，在强磁场的时候低能有效理论预言[31](由实线表示)与格点结果一致。

在零温时，手征凝聚亦随磁场强度而增加，在弱

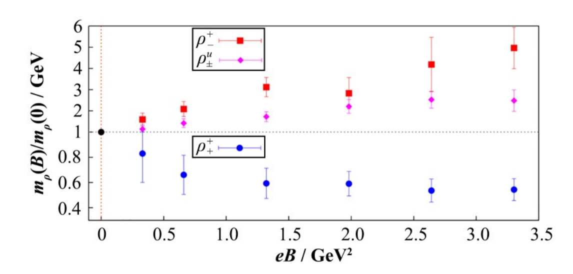


图2 自旋平行于磁场带正电的ρ介子，自旋反平行于磁场的带正电的ρ介子以及中性的ρ介子与它们各自在磁场为零时的质量之比随磁场强度eB的变化[24] 这些连续外推的结果基于淬火近似下的QCD组态，采用的价夸克对应的pion的质量为415 MeV

Fig.2 Continuum extrapolated results of the mass of ρ with a positive charge and spin s_z=1, s_z=−1 and neutral ρ normalized to their corresponding values at vanishing magnetic fields as a function of eB[24]. The results are obtained based on the quenched lattice simulations with a valence pion mass 415 MeV.

场时变化关系为幂律关系(图4(a))，强场时为线性关系(图4(b))[21]。另外可以看到的是上夸克与下夸克的手征凝聚不再一样，这表明了同位旋对称性在磁场下被破坏了。这主要是由于上下夸克的电荷数不同，上夸克比下夸克电荷的绝对值大也导致了上夸克比下夸克的手征凝聚要大。

综合已有的中性赝标量介子的衰变常数、质量及手征凝聚，可以考察如下的Gell-Mann-Oakes-Renner(GMOR)关系[21]：

$$
\begin{aligned}
(m_u+m_d)\left(\langle\bar{\psi}\psi\rangle_u+\langle\bar{\psi}\psi\rangle_d\right) &= 2f_\pi^2M_\pi^2(1-\delta_\pi)\\
4m_u\langle\bar{\psi}\psi\rangle_u &= 2f_{\pi_u^0}^2M_{\pi_u^0}^2(1-\delta_{\pi_u^0})\\
4m_d\langle\bar{\psi}\psi\rangle_d &= 2f_{\pi_d^0}^2M_{\pi_d^0}^2(1-\delta_{\pi_d^0})\\
(m_d+m_s)\left(\langle\bar{\psi}\psi\rangle_d+\langle\bar{\psi}\psi\rangle_s\right) &= 2f_K^2M_K^2(1-\delta_K)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

式中：δ_H为对磁场下GMOR关系的修正。这些修正的结果显示在图5中，这是格点QCD研究中第一次研究磁场对GMOR关系的修正。图5分别是2味和

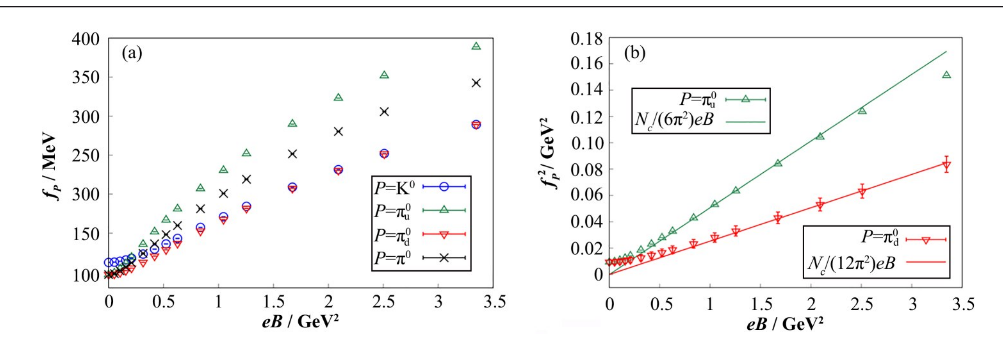


图3 中性赝标量介子的衰变常数(a)、中性pion衰变常数中上夸克部分和下夸克部分的平方(b)随磁场强度的变化[21] 实线给出的是理论预言[29],数据来源于图(a)

Fig.3 Decay constants of neutral pseudoscalar mesons (a), the square of decay constants obtained from the up and down quark component of the neutral pion (b) as a function of eB[21]. The solid line is the theoretical prediction from Ref.[31] and the lattice data is the same as used in the left plot.

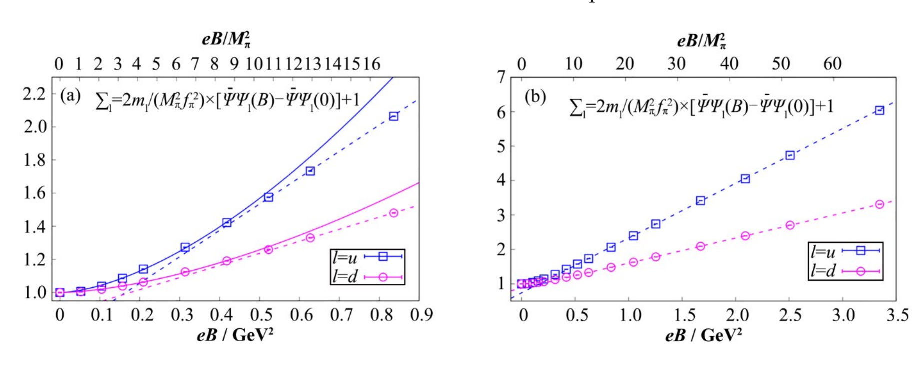


图4 零温下手征凝聚与磁场强度的变化关系[21] (a) 弱场的情况,(b) 扩展到强场的情况

Fig.4 eB dependences of chiral condensate at $eB < 0.9$ GeV^2 (a) and with eB up to 3.5 GeV^2 (b)[21]

3味GMOR关系的修正值。在不同的紫外截断($\lambda_{\rm cut}^{UV}$)下,尽管手征凝聚的值会不一样,但磁场对GMOR关系的修正随着磁场强度的变化趋势并无太大差别(在强磁场下修正均趋于0)。这从某种程度上表明,中性的pion和kaon保持了Goldstone玻色子的特性。值得注意的是,在该结果中,pion的质量并没有到手征极限,格点计算也没有做到连续极限外推,因此这些修正中除了有磁场的贡献外,也包含有限质量的贡献以及格点计算的离散效应。

2.2 QCD相转变温度及反磁催化

由于手征凝聚是手征相变的序参量,即手征对称性破缺的大小与手征凝聚大小相关。手征凝聚的增大则表明手征对称性破缺程度的增强。早期人们通过格点量子色动力学研究得到在零温度时手征凝聚随磁场强度而增加,即磁催化[18]。由此,早期的唯象理论研究均预言在强磁场下需要更高的温度来恢复手征对称性,即强磁场下相变的温度将随磁场强度的增强而变大。然而,令大家出乎意料的是在物理点、连续极限下的格点QCD结果表明,QCD的赝临界温度随着磁场的增强而降低(图6(a))[19]! 同时人们发现在临界温度附近(图6(b)),上夸克的手征凝聚不再与零温时候类似地随磁场强度的增加而单

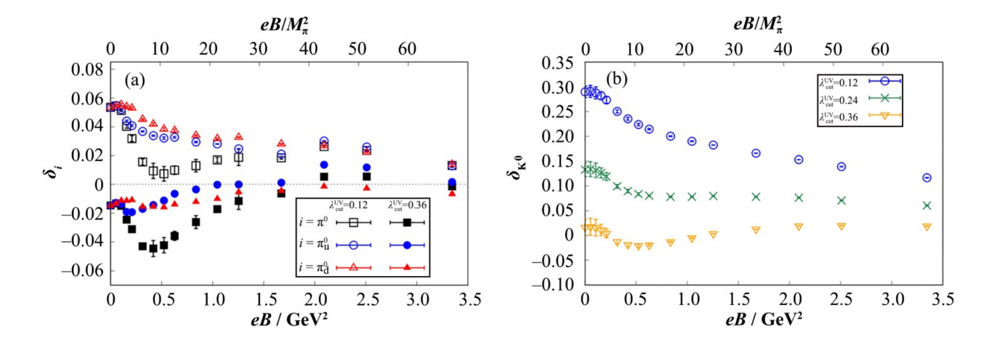


图5 2味(a)和3味(b) GMOR关系在磁场中的修正[21]

Fig.5 Correction to two-flavor (a) and three-flavor (b) GMOR relation in nonzero magnetic fields[21]

调增加，而是先增大后减小甚至是随磁场的增加而单调减小[19,32]。人们一般称手征凝聚的减小为反磁催化，有时把同时出现的赝临界温度的降低和手征凝聚的减小作为一体紧密地联系起来。有意思的是反磁催化或磁催化的现象最近在奇异夸克凝聚上也观测到了[33]。

最近的研究表明，赝临界温度的降低和手征凝聚的减小并不一定会同时出现。图7给出当磁场强度为0.6 GeV²时，手征凝聚与其零磁场下的差别在赝临界温度时随体系pion质量的变化关系[34]。当pion质量较小时，如小于500 MeV时，就出现人们之前看到的反磁催化（Inverse Magnetic Catalysis，IMC）现象，即差别小于零。当pion质量大于500 MeV的时候，这个差别变得大于零，即出现了磁催化（Magnetic Catalysis，MC）现象。值得注意的是，体系pion质量的大小并不改变赝临界温度的变化趋势，赝临界温度总是随着磁场强度的增加而降低。因此，这表明不管是磁催化还是反磁催化都不是赝临界温度升高、降低的充分必要条件，更不能混为一谈。

赝临界温度随磁场强度的增加而降低很可能与体系中pion质量的变化趋势相关。我们可以借鉴当磁场为零时的情况，如图8(a)所示，体系的赝临界温度T_{pc}随夸克质量（体系pion质量）的变小而降低[36]；在磁场不为零时，体系的pion质量（图1(b)），亦随着磁场强度的增加而变小。对比磁场为零时的情况，这似乎能说明体系的赝临界温度随磁场强度的增强而降低这一现象，即当体系中的最轻的Goldstone玻色子pion的质量降低时，不管是处于磁场中还是磁场为零，体系的赝临界温度总是会降低。这一论断可以从强子对体系的能量密度的贡献中进一步得到印证。

在强子共振气模型中，可以考察各个强子对体系热力学量的贡献。图8(b)显示了在强子共振气模型的框架下当磁场强度为零时，对体系的能量密度的贡献主要来自于pion[39]。当磁场不为零时，考虑中性pion和kaon的质量变小，而带电pion和kaon的质量变大，这时体系能量密度主要贡献来自于中性的pion，而且其占比相对于磁场为零的时候更大。这表明中性pion对体系的热力学性质起主导作用。另一方面，当体系的最轻的自由度的质量变小时，体系更容易被激发到另外一种相态。由此这与当磁场强度增加时体系的赝临界温度降低是自洽的。

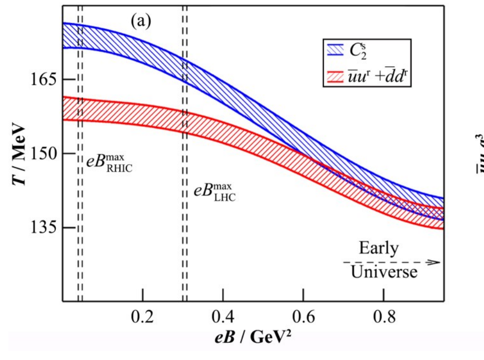
另一方面，体系中是否有反磁催化其实与中性pion的性质也有密切的关系。在零磁场下，人们熟知的Ward-Takahashi恒等式可以将手征性质相关的两个量：手征凝聚和Goldstone玻色子的两点关联函数联系到一起。这一恒等式同样地在非零磁场中亦成立[21]，可以从中性pion扩展到其他的中性赝标量介子如kaon和$\eta^0_{s\bar{s}}$。这些恒等式的具体表达式如下：

$$
\begin{aligned}
\langle\bar{\psi}\psi\rangle_u + \langle\bar{\psi}\psi\rangle_d &= (m_u + m_d)\chi_{\pi^0} \\
\langle\bar{\psi}\psi\rangle_d + \langle\bar{\psi}\psi\rangle_s &= (m_d + m_s)\chi_{K^0} \\
\langle\bar{\psi}\psi\rangle_s &= m_s\chi_{\eta^0_{s\bar{s}}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

式中：χ是对应的强子的关联函数的时空求和，即$\chi_H = \sum_\tau G_H(\tau) = \sum_z G_H(z)$。$G_H(\tau)$和$G_H(z)$分别表示强子的两点时间关联函数和两点空间关联函数。

图9给出对于上、下、奇异夸克凝聚以及对应的中性pion、kaon和$\eta^0_{s\bar{s}}$的恒等式关系在温度为140 MeV和281 MeV下的格点QCD的数值印证[33]。值得注意的是，与GMOR关系不同，Ward-Takahashi恒等式适用于任意温度和磁场以及夸克质量，而GMOR关系仅仅适用于零温且当夸克质量足够小的情况。

由此，利用Ward-Takahashi恒等式，通过手征凝聚观测得到的磁催化或反磁催化可与中性pion和kaon的两点关联函数联系起来。通过强子空间两点关联函数在空间方向上的指数衰减，可以定义如下强子的屏蔽质量M_H：



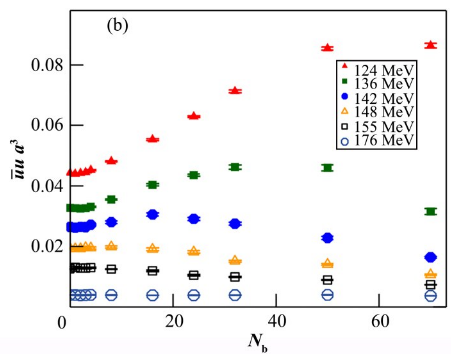


图6　赝临界温度随磁场强度的变化(a)，手征凝聚随磁通量N_b的变化(b)[19]

Fig.6　Pseudo-critical transition temperature as a function of *eB* (a), up quark chiral condensate as a function of N_b (b)[19]

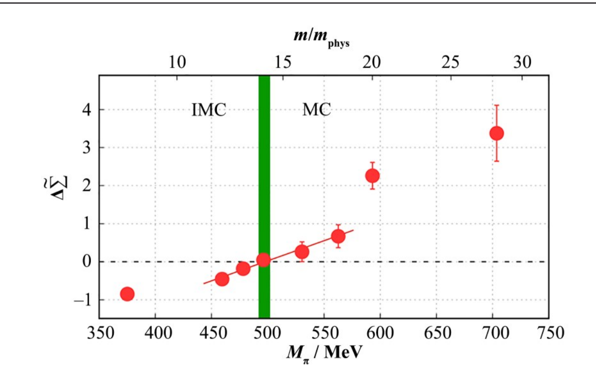


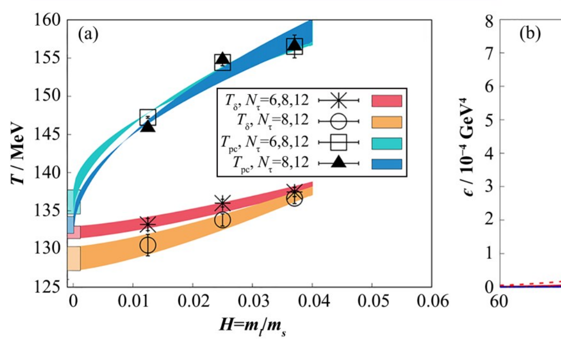
图7 手征凝聚在磁场为0.6 GeV²时候与零磁场时的差别随pion介子质量的变化关系，温度取为随pion介子质量变化的赝临界温度值[34]
差别为负即为反磁催化(IMC)，差别为正时即为磁催化(MC)，类似的结果见文献[35]

Fig.7 Difference of chiral condensate at eB=0.6 GeV² and eB=0 as a function of pion mass along the corresponding trajectory of the pseudocritical temperature[34]. The inverse magnetic catalysis (IMC) is observed because the difference is negative while the magnetic catalysis is observed because the difference is positive. Similar results can be obtained from Ref.[35].

$$\lim_{z\to\infty} G_H(z) \sim \mathrm{e}^{-M_H z} \tag{10}$$

此处需要注意的是§3.1中的强子的基态质量是从时间两点关联函数中抽取，这里考察的是有限温度下从空间两点关联函数中抽取的屏蔽质量。

图10(a)是中性pion的屏蔽质量在非零磁场下的结果与其在零磁场下的结果之比[33]。可以看到，在温度接近于零温的时候，这个比值随磁场强度的增强而减小，在整个磁场强度区间小于1。当温度逐渐上升时，比值随磁场强度的增强而减小的趋势变缓，甚至在温度为140 MeV的时候，出现了先下降后上升的行为。当温度升至169 MeV的时候，也就是该格点模拟中在零磁场下体系的相转变温度，比值从小于1变到了大于1，且比值随着磁场强度的增强而上升。当温度进一步上升到211 MeV时，比值变得较小，但仍然大于1，比值仍然随eB的增加而上升，但上升速度较169 MeV时变得更慢。当温度到达最高的281 MeV时，比值变得又小于1，在eB小于1 GeV²的时候比值又开始随eB的增加而降低，但在eB大于1.5 GeV²时，比值基本不随eB而改变。这种复杂的、随磁场和温度的变化行为是与手征凝聚的变化行为是一致的。因为屏蔽质量对应的是两点关联函数长程的行为，当屏蔽质量变小时，长程的贡献变大；反之则变小。类似的变化行为在中性kaon的屏蔽质量中也有所体现，如图10(b)所示，但变化幅度没有中性pion大。



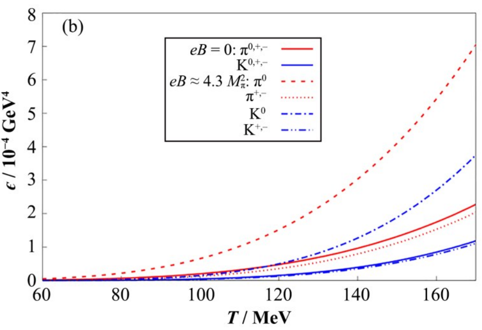


图8 手征相变温度的连续极限及手征极限外推结果(a)[36]，赝临界温度T_{pc}随着夸克(或pion)质量的减小而降低，类似的结果见文献[37−38]，在强子气体模型中pion、kaon对体系能量密度的贡献(b)[39]

Fig.8 Chiral and continuum extrapolation of the chiral phase transition temperaturem (a)[36]. The pseudocritical temperature at nonzero quark mass decreases with a lighter quark or pion. Similar results can be obtained in Ref.[37−38]. The contribution of a pion and kaon to the energy density of the thermal system in the framework of the hadron resonance gas model (b)[39]

导致反磁催化行为出现的原因，目前人们普遍认为与体系中海夸克相关。为了分离出价夸克和海夸克效应，人们定义了价夸克凝聚和海夸克凝聚[40−41]。在前者计算中，磁场仅只存在于传播子中，并不存于体系的配分函数中；在后者计算中相反，磁场仅存在于体系的配分函数中，并不存在于传播子中。人们发现价夸克凝聚一直都是随着磁场强度的增强而变大即只有磁催化效应，而海夸克凝聚则出现随磁场强度增强而减小即反磁场催化效应[41]。同样地，可以定义价夸克和海夸克主导的强子两点关联函数，并由此抽取屏蔽质量[33]。图11是由价夸克和海夸克中性pion两点关联函数抽取的屏蔽质量与零磁场下的结果的比值在不同温度下随磁场强度的变化[33]。可以看到，在非零磁场下价夸克屏蔽质量的比值均小于1，且随着磁场强度的增加而单调下降；而海夸克屏蔽质量的比值下均大于等于1且在温度大于120 MeV时比值随磁场强度的增加而变大。另外也可以看到，在某一固定磁场强度($eB \lesssim 2$ GeV²)下，价夸克屏蔽质量的比值总是随着温度的升高而变大，而海夸克屏蔽质量的比值却有

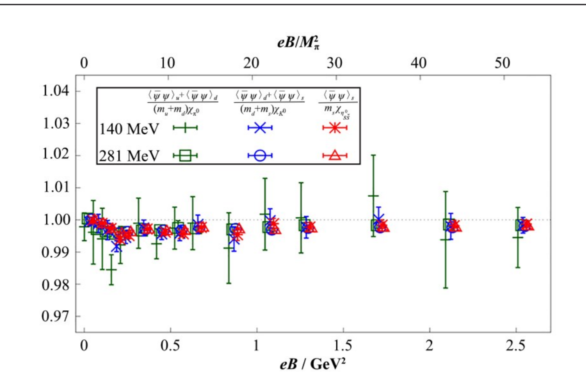


图9 Ward-Takahashi恒等式在温度为140 MeV和218 MeV的格点QCD的数值验证[33]
该格点QCD模拟中零磁场下的pion的质量为220 MeV，kaon的质量为507 MeV，零温时数值验证可见文献[21]中的图5

Fig.9 Numerical demonstration of the Ward-Takahashi identity at T=140 MeV and 281 MeV at nonzero magnetic fields[33] based on lattice QCD simulations with a pion and kaon masses of 220 MeV and 507 MeV, respectively. The demonstration at zero temperature can be obtained in Fig.5 in Ref.[21].

着非常明显的非单调的行为，比值在温度为169 MeV时最大。这些发现均与价夸克凝聚和海夸克凝聚的行为一致，同时也表明了赝临界温度的下降也主要是由海夸克效应导致的，毕竟价夸克只是体系的探针而已，并不影响体系本身的赝临界温度等热力学性质。

2.3　强磁场下的QCD相结构

强磁场下的QCD可能呈现出丰富的相结构[42]。在零磁场下，一个非常有用的去研究QCD相结构的物理量便是守恒荷——重子数(B)、电荷数(Q)和奇异数(S)的关联与涨落[43–49]。这些守恒荷的关联与涨落被定义为压强P在重子(μ_B)、电荷(μ_Q)及奇异势能(μ_S)为零附近的泰勒展开系数[50–51]：

$$\chi_{ijk}^{BQS} = \left.\frac{\partial^{i+j+k} P/T^4}{\partial\mu_B^i \partial\mu_Q^j \partial\mu_S^k}\right|_{\mu_B=\mu_Q=\mu_S=0} \tag{11}$$

由于式(11)是在化学势能为零时计算得到，故不存在符号问题。考虑到体系压强P与磁场eB相关时，就可以得到在磁场不为零时的体系中守恒荷的涨落[52–53]。

在磁场为零时，体系具有同位旋守恒，即$\chi_2^u=\chi_2^d$且$\chi_{11}^{us}=\chi_{11}^{ds}$，由此可以得出：

$$2\chi_{11}^{QS}-\chi_{11}^{BS}=\chi_2^S$$
$$2\chi_{11}^{BQ}-\chi_{11}^{BS}=\chi_2^B \tag{12}$$

然而，在非零磁场下，由于上下夸克的电荷数不

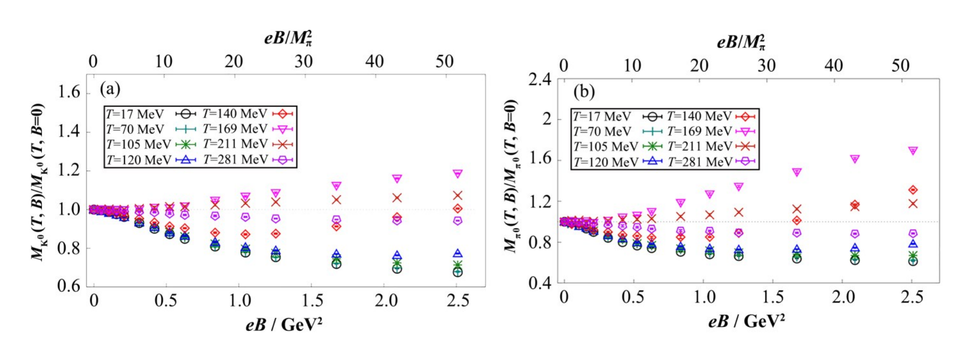


图10 中性赝标量介子的屏蔽质量在磁场不为零时的结果与磁场为零时的结果的比值在不同温度随磁场强度的变化[33]
(a) 中性pion的结果，(b) 中性kaon的结果

Fig.10 Ratio of screening masses at nonzero magnetic fields to the corresponding values at zero magnetic fields as a function of eB at various temperatures for neutral pions (a) and kaons (b)[33]

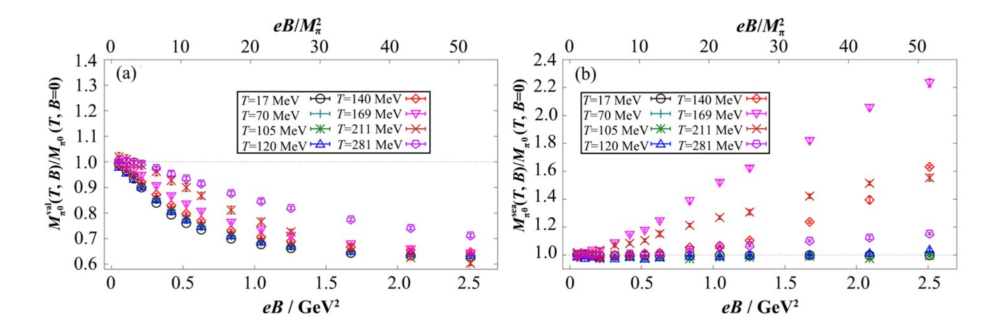
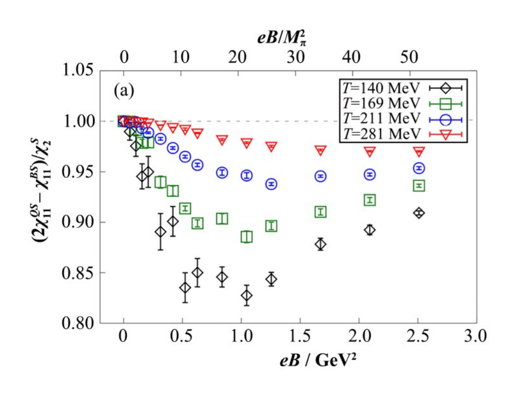


图11 中性pion的价夸克(a)和海夸克(b)屏蔽质量在磁场不为零时的结果与磁场为零时的结果的比值在不同温度随磁场强度的变化[33]

Fig.11 Ratio of valence (a) and sea (b) screening masses at nonzero magnetic fields to the corresponding values at zero magnetic fields as a function of eB at various temperatures for neutral pions[33]

一样，则同位旋对称性被明显地破坏了。如图4中上下夸克的手征凝聚值不一样。同样地，式(11)、(12)在磁场中将不再成立。

如图12所示，$(2\chi_{11}^{QS}-\chi_{11}^{BS})/\chi_2^S$和$(2\chi_{11}^{BQ}-\chi_{11}^{BS})/\chi_2^B$在磁场为零时均为1。一旦将磁场打开，它们就变得不为1，即同位旋对称性受到了破坏。在同样的磁场强度下，温度越低同位旋对称性破缺得越厉害[52]。由于在高温强场的自由极限下，图12(a)中的物理量将趋近于1，因此，它在不同的温度下均变现出了非单调的变化行为：先随磁场强度的增加而下降，偏离同位旋对称性的值1，最后在强磁场又开始上升而趋近于高温强场的自由极限值1。与图12(a)中的物理量均从下方趋近于高温强场极限不一样，图12(b)中的量仅在两个最高的温度是从下方趋近于高温强场。



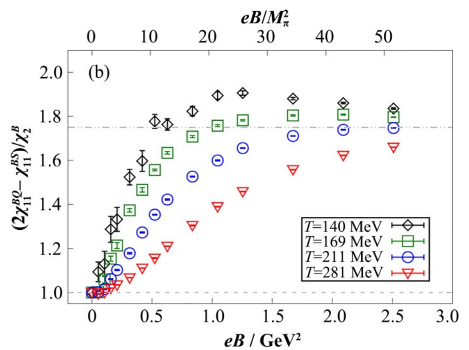


图12 与同位旋对称性相关的两个量在不同的温度随磁场强度的变化[52]
图中灰色断线给出的是在高温强场的自由极限下的结果，格点QCD的模拟是基于pion质量为220 MeV的2+1味QCD
Fig.12 Demonstration of iso-spin symmetry breaking at nonzero magnetic fields[52]
The grey dashed line denotes the results in the free limit, while the lattice QCD resutls are obtained with pion mass of 220 MeV.

图13直接给出了二阶重子数涨落χ_2^B在不同的磁通量（即不同的磁场强度）下随温度的变化关系[52]。在磁场强度为零($N_b=0$)时，χ_2^B随温度的升高而单调递增。当$N_b\geqslant 12$时，χ_2^B出现了随温度非单调变化的行为，即先增加后降低，并出现了峰的形状。随着磁场强度的增加，峰的形状越来越明显，且峰的高度越来越大，呈现出发散的趋势。峰的位置也随着磁场强度的增加逐渐移向更小的温度，这与赝临界温度随磁场的增强而降低是一致的。

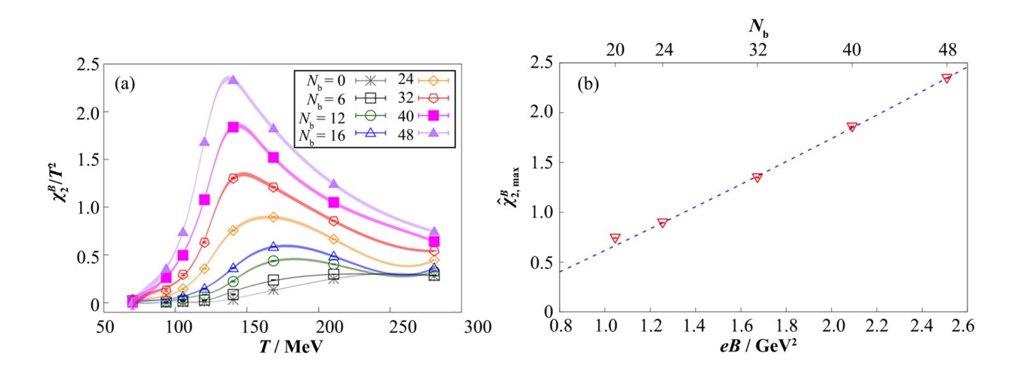


图13 二阶重子数涨落在不同磁场强度下随温度的变化关系(a)[52]，根据二阶重子数涨落的临界行为拟合峰的高度得到临界点处磁场强度约为7 GeV² (b)
Fig.13 2nd order baryon number fluctuation as a function of temperature at various magnetic fluxes (a)[52], a fit to the peak of the 2nd order baryon number fluctuation according to its critical behavior which results in $eB_c\approx 7$ GeV² (b)

早期人们预言在极强的磁场下可能会存在QCD临界点[54]，参考在零磁场下重子数的涨落的临界行为，将外场由夸克质量替换为磁场，可得二阶重子数涨落的峰值在磁场下的临界行为如下：

$$\chi_{2,\max}^B=b(eB_c-eB)^{(1-\alpha)/\beta\delta}+d \tag{13}$$

式中：eB_c是在临界点时的磁场强度；α,β,δ为Z(2)群的临界指数。利用式(13)(b、d及eB_c)拟合图13(a)中二阶重子数涨落的峰值得到临界点时的磁场强度约为7 GeV²。注意到这个结果是基于非物理pion质量的格点QCD模拟得到的结果。最近在物理点的、小磁场的结果见文献[53]。

另一方面，需要指出的是，图13及图12均表明

强磁场会对守恒荷的涨落产生很大的影响。由于在高能重离子碰撞中，非对心碰撞初期产生的磁场强度比对心碰撞初期产生的磁场强度更强，人们可以构造一个与中心度相关的、与守恒荷涨落相关的物理量来探测重离子碰撞中磁场的手印[52–53]。

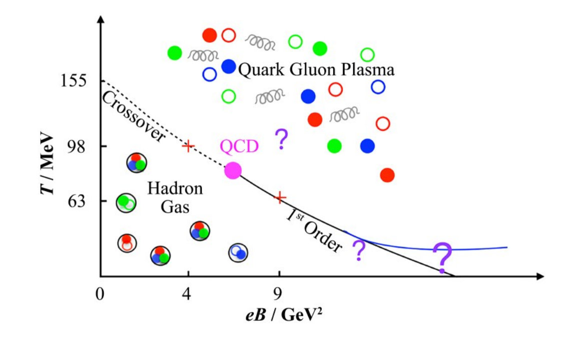


图14 QCD在强磁场下的相结构示意图[22]
图中红色'+'标出了最新的格点QCD结果

Fig.14 Sketch plot of QCD phase diagram in the *T*-*eB* plane based on recent lattice results[22]. The red '+' at eB=4 GeV^2 labels a crossover transition while it labels a first order phase transition at eB=9 GeV^2.

最近的格点QCD研究在物理pion质量直接模拟了在非常强的磁场强度(eB=4 GeV^{2}和9 GeV^2)下的结果[22]。通过考察手征凝聚及其磁化率对磁场、温度、体积的依赖，得到了在eB=4 GeV^{2}时体系从强子相到夸克胶子等离子体相的转变仍然是一个快速的平滑过渡，而并不存在任何的奇异行为。这个平滑过渡的温度被估计为98 MeV(图14)。当磁场强度增至9 GeV^{2}时，在手征凝聚的时间轨迹上发现了亚稳态，即出现了一阶相变；一阶相变的温度被估计为63 MeV。由此在平滑过渡和一阶相变之间必然会存在一个QCD临界点。这个QCD临界点应该具有服从Z(2)群的普适律。目前，该QCD临界点的位置并未被确认，对该QCD临界点的研究亦将对温度-化学势能平面下寻找QCD临界点提供借鉴作用。另一方面，一阶相变在eB=9 GeV^{2}的临界温度已经低至63 MeV。一个可能的猜测是在零温下，一个足够强的磁场是否仍然能诱导真空发生相变。这也值得后续的研究。

3 结语

有限温度有限密度的格点量子色动力学研究早在20世纪70年代就开始了，而尽管强磁场下的格点量子色动力学的研究约从2010年才开始，但已经取得了很多重要的结果。本文主要回顾了在零温度时QCD在强磁场下的手征性质、反磁催化和QCD相转变温度，以及在超强磁场下的QCD相结构研究。除此之外，人们利用格点量子色动力学亦研究了强磁场下重子的质量[55]，在小夸克质量、强磁场下的QCD相结构[56]，QCD在零重子化学势能下、强磁场中的状态方程[57–58]，QCD的顺磁或反磁性质[59–60]，强磁场下的电导率[61]、重夸克化学势能和弦张力[62–64]以及有限重子化学势能和强磁场下的QCD相转变[65]等。鉴于强磁场下的格点QCD研究仅开展了十多年，因此还有很多物理内容值得去探索研究。

作者贡献声明 丁亨通、李胜泰、刘俊宏三位作者贡献等同。

参考文献

1 Kharzeev D E, Liao J F. Chiral magnetic effect reveals the topology of gauge fields in heavy-ion collisions[J]. Nature Reviews Physics, 2021, **3**(1): 55 – 63. DOI: 10.1038/s42254-020-00254-6.

2 Kharzeev D E, McLerran L D, Warringa H J. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: "Event by event and violation"[J]. Nuclear Physics A, 2008, **803**(3 – 4): 227 – 253. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2008.02.298.

3 Skokov V V, Illarionov A Y, Toneev V D. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions[J]. International Journal of Modern Physics A, 2009, **24**(31): 5925 – 5932. DOI: 10.1142/s0217751x09047570.

4 Deng W T, Huang X G. Event-by-event generation of electromagnetic fields in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **85**(4): 044907. DOI: 10.1103/physrevc.85.044907.

5 Vachaspati T. Magnetic fields from cosmological phase transitions[J]. Physics Letters B, 1991, **265**(3 – 4): 258 – 261. DOI: 10.1016/0370-2693(91)90051-q.

6 Duncan R C, Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - implications for gamma-ray bursts[J]. The Astrophysical Journal Letters, 1992, **392**: L9. DOI: 10.1086/186413.

7 Kharzeev D E, Liao J. Isobar collisions at RHIC to test local parity violation in strong interactions[J]. Nuclear Physics News, 2019, **29**(1): 26 – 31.

8 Abdallah M, Aboona B, Adam J, *et al*. Search for the chiral magnetic effect with isobar collisions at $\sqrt{s_{NN}}$= 200 GeV by the STAR Collaboration at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J]. Physical Review C, 2022, **105**(1): 014901. DOI: 10.1103/PhysRevC.105.014901.

9 STAR. Search for the chiral magnetic effect in Au+Au

collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=27 GeV with the STAR forward event plane detectors[EB/OL]. 2022: arXiv:2209.03467.

10 Kharzeev D E, Liao J F, Shi S Z. Implications of the isobar-run results for the chiral magnetic effect in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2022, **106**(5): L051903. DOI: 10.1103/physrevc.106.l051903.

11 Wang F. CME experimental results and interpretation[J]. Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement, 2023, **16**(1): 15.

12 Ding H T, Karsch F, Mukherjee S. Thermodynamics of strong-interaction matter from lattice QCD[J]. International Journal of Modern Physics E, 2015, **24**(10): 1530007. DOI: 10.1142/s0218301315300076.

13 Ding H T, Li S T, Mukherjee S, *et al*. Correlated Dirac eigenvalues and axial anomaly in chiral symmetric QCD [J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(8): 082001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.082001.

14 Wang Z Y, Zhao J X, Greiner C, *et al*. Incomplete electromagnetic response of hot QCD matter[J]. Physical Review C, 2022, **105**(4): L041901. DOI: 10.1103/physrevc.105.l041901.

15 Yamamoto A. Overview of external electromagnetism and rotation in lattice QCD[J]. The European Physical Journal A, 2021, **57**(6): 211. DOI: 10.1140/epja/s10050-021-00530-8.

16 D'Elia M. Lattice QCD in background fields[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2013, **432**: 012004. DOI: 10.1088/1742-6596/432/1/012004.

17 Endrodi G. QCD in magnetic fields: from Hofstadter's butterfly to the phase diagram[J]. PoS LATTICE, 2014, **2014**: 018. DOI:10.22323/1.214.0018.

18 D'Elia M, Mukherjee S, Sanfilippo F. QCD phase transition in a strong magnetic background[J]. Physical Review D, 2010, **82**(5): 051501. DOI: 10.1103/physrevd.82.051501.

19 Bali G S, Bruckmann F, Endrodi G, *et al*. The QCD phase diagram for external magnetic fields[J]. Journal of High Energy Physics, 2012, **2012**(2): 044. DOI: 10.1007/JHEP02(2012)044.

20 Ding H T, Schmidt C, Tomiya A, *et al*. Chiral phase structure of three flavor QCD in a background magnetic field[J]. Physical Review D, 2020, **102**(5): 054505. DOI: 10.1103/physrevd.102.054505.

21 Ding H T, Li S T, Tomiya A, *et al*. Chiral properties of (2+1) -flavor QCD in strong magnetic fields at zero temperature[J]. Physical Review D, 2021, **104**: 014505. DOI: 10.1103/physrevd.104.014505.

22 D'Elia M, Maio L, Sanfilippo F, *et al*. Phase diagram of QCD in a magnetic background[J]. Physical Review D, 2022, **105**(3): 034511. DOI: 10.1103/physrevd. 105. 034511.

23 Luschevskaya E V, Solovjeva O E, Teryaev O V. Magnetic polarizability of pion[J]. Physics Letters B, 2016, **761**: 393 – 398. DOI: 10.1016/j. physletb. 2016. 08.054.

24 Bali G S, Brandt B B, Endrődi G, *et al*. Meson masses in electromagnetic fields with Wilson fermions[J]. Physical Review D, 2018, **97**(3): 034505. DOI: 10.1103/physrevd. 97.034505.

25 Luschevskaya E V, Solovjeva O E, Kochetkov O A, *et al*. Magnetic polarizabilities of light mesons in SU(3) lattice gauge theory[J]. Nuclear Physics B, 2015, **898**: 627 – 643. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2015.07.023.

26 Lin F, Xu K, Huang M. Magnetism of QCD matter and the pion mass from tensor-type spin polarization and the anomalous magnetic moment of quarks[J]. Physical Review D, 2022, **106**: 016005. DOI: 10.1103/physrevd. 106.016005.

27 Mei J, Xia T, Mao S. Mass spectra of neutral mesons K_0, π_0, η, η' at finite magnetic field, temperature and baryon chemical potential[EB/OL]. 2022: arXiv: 2212.04778. https://arxiv.org/abs/2212.04778.

28 Sheng B K, Wang Y Y, Wang X Y, *et al*. Pole and screening masses of neutral pions in a hot and magnetized medium: a comprehensive study in the Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2021, **103**(9): 094001. DOI: 10.1103/physrevd.103.094001.

29 Li J N, Cao G Q, He L Y. Gauge independence of pion masses in a magnetic field within the Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2021, **104**(7): 074026. DOI: 10.1103/physrevd.104.074026.

30 Chao J, Liu Y X. Dimensional reduction and the generalized pion in a magnetic field within the NJL model [EB/OL]. 2022: arXiv: 2202.05090. https://arxiv. org/abs/2202.05090.

31 Miransky V A, Shovkovy I A. Magnetic catalysis and anisotropic confinement in QCD[J]. Physical Review D, 2002, **66**(4): 045006. DOI: 10.1103/physrevd.66.045006.

32 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. QCD quark condensate in external magnetic fields[J]. Physical Review D, 2012, **86**(7): 071502. DOI: 10.1103/physrevd. 86.071502.

33 Ding H T, Li S T, Liu J H, *et al*. Chiral condensates and screening masses of neutral pseudoscalar mesons in thermomagnetic QCD medium[J]. Physical Review D, 2022, **105**(3): 034514. DOI: 10.1103/physrevd. 105. 034514.

34 Endrődi G, Giordano M, Katz S D, *et al*. Magnetic catalysis and inverse catalysis for heavy pions[J]. Journal of High Energy Physics, 2019, **2019**(7): 7. DOI: 10.1007/JHEP07(2019)007.

35 D'Elia M, Manigrasso F, Negro F, *et al*. QCD phase diagram in a magnetic background for different values of the pion mass[J]. Physical Review D, 2018, **98**(5): 054509. DOI: 10.1103/physrevd.98.054509.

36 Li S T, Ding H T. Chiral crossover and chiral phase transition temperatures from lattice QCD[J]. Nuclear Physics Review, 2020, **37**(3): 674 – 678. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.37.2019CNPC65.

37 Ding H T, Hegde P, Kaczmarek O, *et al*. Chiral phase transition temperature in (2+1)-flavor QCD[J]. Physical Review Letters, 2019, **123**(6): 062002. DOI: 10.1103/physrevlett.123.062002.

38 Kotov A Y, Lombardo M P, Trunin A. QCD transition at the physical point, and its scaling window from twisted mass Wilson fermions[J]. Physics Letters B, 2021, **823**: 136749. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136749.

39 Ding H T, Li S T, Shi Q, *et al*. QCD phase structure in strong magnetic fields[J]. Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement, 2021, **14**(2): 403. DOI: 10.5506/aphyspolbsupp.14.403.

40 D'Elia M, Negro F. Chiral properties of strong interactions in a magnetic background[J]. Physical Review D, 2011, **83**(11): 114028. DOI: 10.1103/physrevd.83.114028.

41 Bruckmann F, Endrődi G, Kovács T G. Inverse magnetic catalysis and the Polyakov loop[J]. Journal of High Energy Physics, 2013, **2013**(4): 112. DOI: 10.1007/JHEP04(2013)112.

42 曹高清. 极强磁场与QCD相图[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040003. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040003.

CAO Gaoqing. Extremely strong magnetic field and QCD phase diagram[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040003. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040003.

43 许坤, 黄梅. QCD临界终点与重子数扰动[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040005.

XU Kun, HUANG Mei. QCD critical end point and baryon number fluctuation[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs. 46. 040005.

44 吴善进, 宋慧超. QCD临界点附近的动力学临界涨落[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

WU Shanjin, SONG Huichao. Critical dynamical fluctuations near the QCD critical point[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

45 吴元芳, 李笑冰, 陈丽珠, 等. 相对论重离子碰撞中确定QCD相边界的若干问题[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040006. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040006.

WU Yuanfang, LI Xiaobing, CHEN Lizhu, *et al*. Several problems in determining the QCD phase boundary by relativistic heavy ion collisions[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040006. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040006.

46 朱洲润, 赵彦清, 侯德富. QCD相结构的全息模型研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040007. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040007.

ZHU Zhourun, ZHAO Yanqing, HOU Defu. QCD phase structure from holographic models[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040007. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040007.

47 杜轶伦, 李程明, 史潮, 等. 基于有效场论的QCD相图研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040009. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040009.

DU Yilun, LI Chengming, SHI Chao, *et al*. Review of QCD phase diagram analysis using effective field theories [J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040009. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040009.

48 尹伊. BEST合作组QCD相图研究进展[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040010. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040010.

YIN Yi. The BEST framework for exploring the QCD phase diagram: progress summary[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040010. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040010.

49 尹诗, 谈阳阳, 付伟杰. 临界现象与泛函重整化群[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040002. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023.hjs.46.040002.

YIN Shi, TAN Yangyang, FU Weijie. Critical phenomena and functional renormalization group[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040002. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040002.

50 Allton C R, Ejiri S, Hands S J, *et al*. QCD thermal phase transition in the presence of a small chemical potential[J]. Physical Review D, 2002, **66**(7): 074507. DOI: 10.1103/physrevd.66.074507.

51 Gavai R V, Gupta S. Pressure and nonlinear susceptibilities in QCD at finite chemical potentials[J]. Physical Review D, 2003, **68**(3): 034506. DOI: 10.1103/physrevd.68.034506.

52 Ding H T, Li S T, Shi Q, *et al*. Fluctuations and correlations of net baryon number, electric charge and strangeness in a background magnetic field[J]. The European Physical Journal A, 2021, **57**(6): 202. DOI: 10.1140/epja/s10050-021-00519-3.

53 Ding H T, Li S T, Liu J H, *et al*. Fluctuations of conserved charges in strong magnetic fields from lattice QCD[EB/OL]. 2022: arXiv: 2208.07285. https://arxiv. org/abs/2208.07285.

54 Endrödi G. Critical point in the QCD phase diagram for extremely strong background magnetic fields[J]. Journal of High Energy Physics, 2015, **2015**(7): 173. DOI: 10.1007/JHEP07(2015)173.

55 Endrődi G, Markó G. Magnetized baryons and the QCD phase diagram: NJL model meets the lattice[J]. Journal of High Energy Physics, 2019, **2019**(8): 36. DOI: 10.1007/JHEP08(2019)036.

56 Ding H T, Schmidt C, Tomiya A, *et al*. Chiral phase structure of three flavor QCD in a background magnetic field[J]. Physical Review D, 2020, **102**(5): 054505. DOI: 10.1103/physrevd.102.054505.

57 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. The QCD equation of state in background magnetic fields[J]. Journal of High Energy Physics, 2014, **2014**(8): 177. DOI: 10.1007/JHEP08(2014)177.

58 Endrődi G. QCD equation of state at nonzero magnetic fields in the Hadron Resonance Gas model[J]. Journal of High Energy Physics, 2013, **2013**(4): 23. DOI: 10.1007/JHEP04(2013)023.

59 Bali G S, Endrődi G, Piemonte S. Magnetic susceptibility of QCD matter and its decomposition from the lattice[J]. Journal of High Energy Physics, 2020, **2020**(7): 183. DOI: 10.1007/jhep07(2020)183.

60 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. Paramagnetic squeezing of QCD matter[J]. Physical Review Letters, 2014, **112**(4): 042301. DOI: 10.1103/physrevlett. 112. 042301.

61 Astrakhantsev N, Braguta V V, D'Elia M, *et al*. Lattice study of the electromagnetic conductivity of the quark-gluon plasma in an external magnetic field[J]. Physical Review D, 2020, **102**(5): 054516. DOI: 10.1103/physrevd.102.054516.

62 Bonati C, D'Elia M, Mariti M, *et al*. Magnetic field effects on the static quark potential at zero and finite temperature[J]. Physical Review D, 2016, **94**(9): 094007. DOI: 10.1103/physrevd.94.094007.

63 Bonati C, D'Elia M, Mariti M, *et al*. Anisotropy of the quark-antiquark potential in a magnetic field[J]. Physical Review D, 2014, **89**(11): 114502. DOI: 10.1103/physrevd.89.114502.

64 D'Elia M, Maio L, Sanfilippo F, *et al*. Confining and chiral properties of QCD in extremely strong magnetic fields[J]. Physical Review D, 2021, **104**(11): 114512. DOI: 10.1103/physrevd.104.114512.

65 Braguta V V, Chernodub M N, Kotov A Y, *et al*. Finite-density QCD transition in a magnetic background field[J]. Physical Review D, 2019, **100**(11): 114503. DOI: 10.1103/physrevd.100.114503.